POJĘCIE PROCESU STOCHASTYCZNEGO

Przykład
Amplituda napięcia generowanego przez prądnicę prądu zmiennego zależy od czynników losowych i może być zapisana jako funkcja

$$X(t) = A \sin ct$$

c - stała określająca częstotliwość,
A - zmienna losowa o rozkładzie np. N(230, 20),
t - czas, $t \in R$.

Proces stochastyczny jako funkcja dwóch zmiennych

Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, S, P) i niepusty podzbiór zbioru liczb rzeczywistych *T*. **Proces stochastyczny** jest to funkcja

$$X : \Omega x T \to R$$

rzeczywista dwóch zmiennych: zdarzenia elementarnego ω i zmiennej rzeczywistej *t* (czasu). Przy czym zakładamy, że dla ustalonego *t*, funkcja *X* jako funkcja argumentu ω jest zmienną losową (powinien być spełniony warunek $\bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{x \in R} \{\omega : X(t,\omega) < x\} \in S$).

$$X(\omega, t) \text{ – proces stochastyczny}$$

proces *X* oznaczać będziemy $X(t)$ lub X_t.

Jeśli ustalimy zdarzenie elementarne, tzn. przyjmiemy $\omega = \omega_0$, to otrzymujemy funkcję $X(\omega_0, t)$ rzeczywistą zmiennej rzeczywistej *t*. Oznaczamy ją $x(t)$ i nazywamy **realizacją procesu** $X(t)$.

Jeśli ustalimy czas, tzn. przyjmiemy $t = t_0$, to otrzymujemy funkcję $X(\omega, t_0)$ rzeczywistą zdarzenia elementarnego, czyli **zmienną losową** .

Jeśli ustalimy zdarzenie elementarne $\omega = \omega_0$ i ustalimy czas $t = t_0$, to otrzymujemy liczbę $X(\omega_0, t_0)$ zwaną **stanem procesu**.

Proces stochastyczny jako rodzina zmiennych losowych

Rozważamy dwa niepuste zbiory: *T* – podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, elementy tego zbioru są chwilami, oraz zbiór *Z* zmiennych losowych określonych na zbiorze zdarzeń elementarnych Ω.

Proces stochastyczny jest to rodzina zmiennych losowych powstała przez przyporządkowanie każdej chwili *t* ze zbioru *T* zmiennej losowej ze zbioru *Z*.

W tej sytuacji proces wygodnie jest zapisywać: X_t.

To podejście pozwala łatwo pokazać, że proces stochastyczny jest uogólnieniem znanych z rachunku prawdopodobieństwa pojęć zmiennej losowej jednowymiarowej , dwuwymiarowej, wielowymiarowej i ciągu zmiennych losowych. Mianowicie, proces stochastyczny jest

– zmienną losową jednowymiarową, gdy $T = \{1\}$; realizacja procesu: liczba rzeczywista,
– zmienną losową dwuwymiarową, gdy $T = \{1, 2\}$; realizacja procesu: para liczb rzeczywistych,
– zmienną losową *n*-wymiarową, gdy $T = \{1, 2, ..., n\}$; realizacja procesu: ciąg *n*-wyrazowy liczb rzeczywistych,
– ciągiem zmiennych losowych, gdy $T = \{1, 2, 3, ...\}$; realizacja procesu: nieskończony ciąg liczb rzeczywistych.

Rozważanie nieprzeliczalnie wielu zmiennych losowych zależnych (w specjalny sposób) jest zagadnieniem istotnie różniącym procesy stochastyczne od klasycznego rachunku prawdopodobieństwa.

Przykład

Niech $T = R$. Jeśli każdej chwili t przyporządkujemy zmienna losową X_t opisaną wzorem $A\cos(2t + 2\pi/3)$ to określimy proces

$$X_t = A\cos(2t + 2\pi/3)$$

(drganie harmoniczne o losowej amplitudzie jako rodzina zmiennych losowych).

Proces stochastyczny jako rodzina realizacji

Rozważamy zbiór zdarzeń elementarnych Ω i zbiór Y funkcji $x(t),\ t \in T$ rzeczywistych zmiennej rzeczywistej.

Proces stochastyczny jest to rodzina funkcji $x(t),\ t \in T$ rzeczywistych zmiennej rzeczywistej, powstała w wyniku przyporządkowania każdemu zdarzeniu elementarnemu ze zbioru Ω dokładnie jednej funkcji ze zbioru Y. Proces oznaczamy wówczas X_ω.

Klasyfikacja procesów

S – zbiór stanów procesu $X(t)$,

T – zbiór chwil, dla których proces jest określony.

Proces DD jest to proces **dyskretny w stanach i dyskretny w czasie**, tzn. zbiory stanów S i chwil T są przeliczalne lub skończone.

Proces DC jest to proces **dyskretny w stanach i ciągły w czasie**, tzn. zbiór S jest skończony lub przeliczalny, natomiast zbiór T jest przedziałem (najczęściej $T =< 0; \infty)$ lub $T = (-\infty; \infty)$.

Proces CD jest to proces **ciągły w stanach i dyskretny w czasie**, tzn. zbiór S jest przedziałem ograniczonym lub nieograniczonym, natomiast T jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym.
Proces CC jest to proces **ciągły w stanach i ciągły w czasie** tzn. zbiory S i T są przedziałami.

Przykład

a) Proces $X(t)$ oznacza liczbę zgłoszeń do centrali telefonicznej w czasie *t*. Obserwacji liczby zgłoszeń dokonujemy w ciągu 24 h pracy tej centrali. Mamy:
$S = \{0,1,2,...\}$ $T = <0;24>$. Proces $X(t)$ jest więc DC.

b) Cząsteczka błądzi po osi *Ox*, przemieszczając się losowo po punktach o współrzędnych całkowitych. Zmiana położenia cząsteczki następuje z prawdopodobieństwem 0,5 co sekundę o +1 (czyli o jednostkę w prawo) lub z prawdopodobieństwem 0,5 o –1 (czyli o jednostkę w lewo). Proces $X(t)$ oznacza współrzędną punktu, w którym cząsteczka znajduje się w chwili *t*. Mamy: $S = \{0,1,-1,2,-2,...\}$, $T = \{0,1,2,...\}$. Proces $X(t)$ jest DD.

c) Obserwujemy temperaturę powietrza w pewnym mieście. Obserwacji dokonujemy w ciągu doby co godzinę. Wiadomo, że temperatura może być dowolną liczbą z przedziału $<-20;30>$ (w stopniach Celsjusza). Proces $X(t)$ oznacza temperaturę powietrza w tym mieście o godzinie *t*. Mamy: $S = <-20;30>$, $T = \{0,1,2,...,24\}$. Proces $X(t)$ jest CD.

Przykład

a) X_t – czas uzyskania połączenia z określoną stroną internetową, jeśli polecenie połączenia zostało wydane na przeglądarce w chwili *t*. Jest to proces typu CC.

b) $\{X_n$, n = 1, 2, ..., 7$\}$– czas efektywnej pracy modemu danego komputera w poszczególne dni konkretnego tygodnia. Jest to proces typu CD.

c) X_t – liczba uczestników forum dyskusyjnego na określonej stronie internetowej, zalogowanych w chwili *t*. Jest to proces typu DC.

d) $\{X_n$, n = 1, 2, ..., 365 $\}$– liczba zalogowań komputerów do danego serwera w poszczególne dni konkretnego roku. Jest to proces typu DD.

Rozkład procesu.

Niech $X(t)$, $t \in T$ będzie procesem stochastycznym.

Rozkład jednowymiarowy procesu $X(t)$ jest to rodzina funkcji

$$(F_t(x))_{t \in T}$$

gdzie dla każdego ustalonego $t \in T$ funkcja $F_t(x)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej $X(t)$:

$$F_t(x) = P(X(t) < x)$$

Rozkład n- wymiarowy procesu $X(t)$ jest to rodzina funkcji

$$(F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n))_{t_1,t_2,\dots,t_n \in T}$$

gdzie dla dowolnie ustalonych $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ jest dystrybuantą zmiennej losowej *n*-wymiarowej $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$:

$$F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n)$$

Uwaga

Jeśli dla każdej liczby t ($t \in T$) zmienna losowa $X(t)$ jest ciągła, to rozkład procesu może być określany za pomocą gęstości $f_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, zaś gdy zmienna losowa $X(t)$ jest skokowa, to rozkład procesu może być określany za pomocą funkcji prawdopodobieństwa $P(X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots X(t_n) = x_n) = p_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Parametry procesu stochastycznego

Rozważamy proces stochastyczny $X(t),\ t \in T$.

Wartość oczekiwana procesu $X(t)$ jest to funkcja, która każdej chwili t ($t \in T$) przyporządkowuje wartość oczekiwaną zmiennej losowej $X(t)$. Funkcję tę oznaczamy przez $m(t)$. Zatem

$$m(t) = EX(t)$$

W szczególności:

I) gdy dla każdego $t \in T$ zmienna losowa $X(t)$ ma rozkład skokowy o funkcji prawdopodobieństwa $P(X(t) = x_i) = p_t(x_i)$ mamy:

$$m(t) = \sum_i x_i p_t(x_i)$$

II) gdy dla każdego $t \in T$ zmienna losowa $X(t)$ ma rozkład ciągły o gęstości $f_t(x)$ to:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x) dx$$

W innych przypadkach przy obliczaniu wartości oczekiwanej procesu korzystamy z własności wartości oczekiwanej zmiennej losowej.

Moment rzędu 2 procesu $X(t)$ jest to wartość oczekiwana procesu $X^2(t)$. Funkcję tę oznaczamy przez $m_2(t)$. Zatem

$$m_2(t) = EX^2(t)$$

W powyższych przypadkach stosujemy wzory:

$$m_2(t) = \begin{cases} \sum_i x_i^2 \, p_t(x_i) & \text{(przypadek I)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f_t(x)dx & \text{(przypadek II)} \end{cases}$$

Wariancja procesu $X(t)$ jest to wartość oczekiwana procesu $(X(t)-m(t))^2$. Funkcję tę oznaczamy przez $D^2\big(X(t)\big) = \sigma^2(t) = V(t)$. Zatem

$$D^2\big(X(t)\big) = \sigma^2(t) = V(t) = E(X(t)-m(t))^2$$

W powyżej rozpatrywanych przypadkach możemy zastosować wzory:

$$D^2\big(X(t)\big) =$$

$$= \begin{cases} \sum_i (x_i - m(t))^2 \, p_t(x_i) & \text{(przypadek I)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m(t))^2 \, f_t(x)dx & \text{(przypadek II)} \end{cases}$$

Na wariancję procesu można stosować wzór:

$$D^2\big(X(t)\big) = m_2(t) - m^2(t)$$

Odchylenie standardowe procesu $X(t)$ jest to pierwiastek z wariancji tego procesu:

$$D(X(t)) = \sqrt{D^2\big(X(t)\big)}$$

Uwaga

Rozpatrywane parametry procesów stochastycznych nie zawsze muszą istnieć. Warunki ich istnienia w ustalonej chwili t są identyczne jak istnienie odpowiednich parametrów zmiennej losowej.

Autokorelacja $R(t_1, t_2)$ **procesu** $X(t)$ jest to moment rzędu 1, 1 zmiennej losowej dwuwymiarowej $(X(t_1), X(t_2))$ dla dowolnych chwil $t_1, t_2 \in T$, czyli wartość oczekiwana iloczynu zmiennych losowych $X(t_1), X(t_2)$

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

Autokowariancja $K(t_1,t_2)$ **procesu** $X(t)$ jest to kowariancja zmiennej losowej dwuwymiarowej $(X(t_1), X(t_2))$ dla dowolnych chwil $t_1,t_2 \in T$:

$$K(t_1,t_2) = E\{[X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)]\}$$

Współczynnik autokorelacji procesu (autokowariancja unormowana) $X(t)$ jest to współczynnik korelacji zmiennej losowej dwuwymiarowej $(X(t_1), X(t_2))$ dla dowolnych chwil $t_1,t_2 \in T$:

$$\rho(t_1,t_2) = \frac{K(t_1,t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$$

Interpretacja i własności parametrów procesu

Wartość oczekiwana procesu w chwili t jest uogólnieniem średniej arytmetycznej stanów procesu w tej chwili.
Wariancja i odchylenie standardowe procesu w chwili t są miarami rozproszenia (rozrzutu, zróżnicowania) rozkładu procesu od wartości oczekiwanej procesu wziętej w tej samej chwili.
Autokowariancja i współczynnik autokorelacji procesu w dwóch chwilach są miarami siły zależności liniowej dwóch zmiennych losowych wybranych z procesu dla tych chwil.

Własność

a) $K(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2)$

b) $D^2(t) = \sigma^2(t) = K(t,t)$

c) $|K(t_1,t_2)| \le \sqrt{\sigma^2(t_1)\sigma^2(t_2)} = \sigma(t_1)\sigma(t_2)$

d) $D^2(t) = \sigma^2(t) = E\left(X_t^2\right) - \left(EX_t\right)^2$

Uwaga

1. Z powyższych własności wynika, że praktycznie wystarczy wyliczyć $m(t)$ i $R(t_1,t_2)$ a pozostałe parametry uzyskamy na ich podstawie.
2. Przy obliczaniu parametrów przydatne bywają następujące zależności znane z rachunku prawdopodobieństwa

$EX^2 = D^2X + (EX)^2$, bo $D^2X = EX^2 - (EX)^2$

$EXY = Cov(X,Y) + EXEY$ bo $Cov(X,Y) = EXY - EXEY$

$Cov(X,Y) = \rho DXDY$ bo $\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{DXDY}$

Przykład

Obliczymy parametry procesu $X(t) = A\sin\omega t$, gdzie $t \in R$.

ω - stała,

A - zmienna losowa o rozkładzie N(230, 5),

Rozwiązanie.
Wartość oczekiwana:
$m(t) = E(X_t) = \sin\omega t EA = 230\sin\omega t$
Autokorelacja:
$R(t_1,t_2) = E(X_{t_1}X_{t_2}) = E(A\sin\omega t_1 A\sin\omega t_2) =$
$= \sin\omega t_1 \sin\omega t_2 E(A^2) = \sin\omega t_1 \sin\omega t_2 \left(D^2 A + (EA)^2\right) =$
$= \sin\omega t_1 \sin\omega t_2 \left(25 + 230^2\right) = 52925\sin\omega t_1 \sin\omega t_2$
Autokowariancja:
$K(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = 25\sin\omega t_1 \sin\omega t_2$
Wariancja:
$D^2(t) = 25(\sin\omega t)^2$

Zauważmy, że dla wartości parametru $t = \dfrac{k\pi}{\omega}$, k = 0,±1,±2,.... otrzymujemy zmienną losową o rozkładzie jednopunktowym i wtedy wariancja procesu jest zerowa.

Współczynnik autokorelacji:
$$\rho(t_1,t_2) = \frac{K(t_1,t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{25\sin\omega t_1 \sin\omega t_2}{\sqrt{25\sin\omega t_1}\sqrt{25\sin\omega t_2}} = 1$$
Oznacza to, że zmienne losowe tworzące proces są w pełni liniowo skorelowane, tzn. zmienna losowa X_{t_2} jest funkcją liniową od X_{t_1}.

Mamy $X_{t_2} = kX_{t_1}$, gdzie $k = \dfrac{\sin\omega t_2}{\sin\omega t_1}$.

Przykład
Obliczymy parametry procesu $X(t) = At^2$, $t \in R$.
A - zmienna losowa skokowa o funkcji prawdopodobieństwa

-1	1
0,5	0,5

Rozwiązanie.
Zauważmy, ze rozpatrywany proces ma tylko dwie realizacje: parabolę $y = t^2$ i parabolę $y = -t^2$.
Wartość oczekiwana:
$m(t) = E(X_t) = -0,5 + 0,5 = 0$
Autokorelacja:

$$R(t_1,t_2)=E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right)=E\left(At_1^2At_2^2\right)=t_1^2t_2^2E(A^2)=$$
$$=t_1^2t_2^2\left(D^2A+(EA)^2\right)=t_1^2t_2^2(1+0)=t_1^2t_2^2$$

Autokowariancja:

$$K(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-m(t_1)m(t_2)=t_1^2t_2^2$$

Wariancja:

$$V(t)=t^4$$

Zauważmy, że dla wartości parametru $t = 0$ otrzymujemy zmienną losową o rozkładzie jednopunktowym i wtedy wariancja procesu jest zerowa. Wraz z bezwzględnym wzrostem *t* wariancja gwałtownie rośnie.

Współczynnik autokorelacji:

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{K(t_1,t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}}=\frac{t_1^2t_2^2}{\sqrt{t_1^4}\sqrt{t_2^4}}=1$$

Oznacza to, że zmienne losowe tworzące proces są w pełni liniowo skorelowane, tzn. zmienna losowa X_{t_2} jest funkcja liniową od X_{t_1}.

Mamy $X_{t_2}=kX_{t_1}$, gdzie $k=\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2$.

Przykład

Obliczymy parametry procesu

$$X(t)=At+B, \qquad t\in R$$

A, *B* - zmienne losowe o parametrach *EA* = 0; *EB* = 1, i $D^2A = 1$, $D^2B = 2$; cov(A, B) = -1.

Rozwiązanie.

Wartość oczekiwana:

$$m(t)=E(X_t)=E(At+B)=tEA+EB=1$$

Autokorelacja:

$$R(t_1,t_2)=E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right)=E\left((At_1+B)(At_2+B)\right)=$$
$$=E\left(A^2t_1t_2+AB(t_1+t_2)+B^2\right)=$$
$$=t_1t_2E\left(A^2\right)+(t_1+t_2)E(AB)+E\left(B^2\right)=$$
$$=t_1t_2\left(D^2A+(EA)^2\right)+(t_1+t_2)(\mathrm{cov}(A,B)+EAEB)+D^2B+(EB)^2=$$
$$=t_1t_2(1+0)+(t_1+t_2)(-1+0\cdot 1)+2+1=t_1t_2-t_1-t_2+3$$

Autokowariancja:

$$K(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) = t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 2$$

Wariancja:

$$V(t) = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$$

Zauważmy, że wariancja tego procesu jest nie mniejsza niż 1 dla dowolnego t.

Współczynnik autokorelacji:

$$\rho(t_1,t_2) = \frac{K(t_1,t_2)}{\sqrt{V(t_1)}\sqrt{V(t_2)}} = \frac{t_1 t_2 - t_1 - t_2 + 2}{\sqrt{(t_1-1)^2+1}\sqrt{(t_2-1)^2+1}}$$

Zadania

Zadanie 1

Dany jest proces stochastyczny $X(t) = t + B, \quad t \in R$, gdzie B jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa

b_i	1	2	3
p_i	0,5	0,3	0,2

a) Znajdź i wykreśl wszystkie realizacje tego procesu.

b) Wyznacz parametry tego procesu (wartość oczekiwaną, autokorelację, autokowariancję i wariancję).

c) Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X(3)$.

Zadanie 2

Dany jest proces stochastyczny $X(t) = At,\ t \in R$, gdzie B jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(1,2)$.

a) Wyznacz jednowymiarowy rozkład tego procesu.

b) Oblicz $P(X(2) < 4)$.

c) Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 3

Dany jest proces $X(t) = e^{-At},\ t \in R$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale w przedziale (0;1).

a) Wykonaj wykres trzech dowolnych realizacji tego procesu.

b) Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 4

Dany jest proces $X(t) = At^2 + Bt,\ t \in R$, gdzie A i B są zmiennymi losowymi nieskorelowanymi o parametrach $EA = 0, D^2A = 3, \quad EB = 2, \quad D^2B = 1$. Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 5

Dany jest proces $X(t) = At^2 + Bt,\ t \in R$, gdzie A i B są zmiennymi losowymi o parametrach $EA = -2, D^2A = 4, \quad EB = 3, D^2B = 5, \quad \operatorname{cov}(A, B) = 2$. Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 6

Dany jest proces $X(t) = \cos(vt + \Phi),\ t \in R$, gdzie Φ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale $< 0; 2\pi)$. Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 7

Dany jest proces $X(t) = A\cos(vt + \Phi),\ t \in R$, gdzie A i Φ są zmiennymi losowymi niezależnymi; A ma parametry: $EA = 0, D^2A = \sigma^2$, zaś Φ ma rozkład jednostajny w przedziale $< 0; 2\pi)$. Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 8

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + Be^t$, gdzie *A*, *B* to nieskorelowane zmienne losowe o parametrach: $EA = 2$; $EB = -3$, $D^2A = 1$, $D^2B = 3$.

Zadanie 9

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + B$, gdzie *A*, *B* to zmienne losowe o parametrach: $EA = 0$; $EB = 0$, i macierzy kowariancji $K = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 10

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At + 1$, gdzie *A* jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale (0, 1). Jak wyglądają realizacje tego procesu? Które z poniższych funkcji są realizacjami tego procesu? $x_1(t) = 0{,}3t + 1$; $x_2(t) = -0{,}3t + 1$; $x_3(t) = 2t + 1$.

Dla ustalonych t_1, t_2 wyznacz stałe *k*, *c* aby $X_{t_2} = kX_{t_1} + c$.

Zadanie 11
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At - 3$, gdzie A jest zmienną losową o rozkładzie N(3, 1). Jak wyglądają realizacje tego procesu?

Zadanie 12
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = \cos(t + B)$, gdzie B to zmienne losowa o rozkładzie jednostajnym w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Zadanie 13
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = A\sin(t + B)$, gdzie A, B to zmienne losowe niezależne o rozkładach jednostajnych w przedziałach odpowiednio $\langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle$ i $\langle -\pi, \pi \rangle$.;

Zadanie 14
Proces X(t) ma tylko 3 realizacje: $x_1(t) = t$; $x_2(t) = t + 1$; $x_3(t) = t + 2$. Realizacje te są przyjmowane odpowiednio z prawdopodobieństwami: 1/2, 1/3; 1/6.
Wyznaczyć parametry tego procesu.

Zadanie 15
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = Y$, gdzie Y jest zmienną losową o parametrach $EY = m$, $D^2Y = \sigma^2$. Jak wyglądają realizacje tego procesu?

Zadanie 16
Wyznaczyć dwuwymiarową dystrybuantę procesu $X(t) = Y$, gdzie Y jest ciągłą zmienną losową o dystrybuancie *F*.

Zadanie 17
Wyznaczyć jednowymiarową gęstość procesu $X(t) = Yt + c$, gdzie Y jest zmienną losową o rozkładzie N(m, σ).

Zadanie 18
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: $EA = 0$; $EB = 0$, i $D^2A = 1$, $D^2B = 2$; $\mathrm{cov}(A, B) = -1$.

Zadanie 19
Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = A + Bt$, gdzie A, B to zmienne losowe o parametrach: $EA = -1$; $EB = 1$, i $D^2A = 1$, $D^2B = 4$; $\rho_{AB} = -0{,}5$.

Zadanie 20

Wyznaczyć parametry procesu $X(t) = At^2 + B$, gdzie A, B to zmienne losowe nieskorelowane. *A* ma rozkład wykładniczy z parametrem 1,5, *B* jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa: *P*(*B* = -1) = 0,5; *P*(*B* = 1) = 0,5;

Zadanie 21

Dany jest proces $X(t) = A\cos t,\ t \in R$, gdzie *A* jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale $< 0;1 >$. Wyznacz parametry tego procesu.

Zadanie 22

Dany jest proces $Y(t) = f(t)X(t) + g(t)$, gdzie *f*, *g* są funkcjami rzeczywistymi (nielosowymi). Wyrazić parametry procesu *Y*(*t*) za pomocą parametrów procesu *X*(*t*).

Zadanie 23

Dany jest proces $X(t),\ t \in < 0;1 >$, gdzie *X*(0) = 0, $X(t) = A_j$, dla $t \in \left(\frac{1}{2^j}; \frac{1}{2^{j-1}}\right]$, *j* = 1, 2, 3, 4, ... A_j - niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie, takie, że $EA_j = 0$, $D^2A_j = 1$, np. $A_j = N(0;1)$.

Sprawdź, że $m(t) = 0$, $R(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & gdy \quad (t_1, t_2) \in T_j \times T_j \\ 0 & gdy \quad (t_1, t_2) \notin T_j \times T_j \end{cases}$.

Zadanie 24

Uzasadnij własności:

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2)$$

$$D^2(t) = \sigma^2(t) = K(t, t)$$

$$D^2(t) = \sigma^2(t) = E\left(X_t^2\right) - \left(EX_t\right)^2$$

Wskazówka. Skorzystaj z odpowiednich własności parametrów zmiennych losowych.

Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1

a) $x_1(t) = t + 1,\ x_2(t) = t + 2,\ x_3(t) = t + 3$

b) $m(t) = t + 1{,}7$, $R(t_1, t_2) = t_1 t_2 + 1{,}7t_1 + 1{,}7t_2 + 3{,}5$,

$K(t_1,t_2)=0{,}61$ (funkcja stała), $\sigma^2(t)=0{,}61$

c)

x_i	1	2	3
$p_3(x_i)$	0,5	0,3	0,2

Zadanie 2

a) $(F_t(x))_{t\in R}$ gdzie dla każdego ustalonego $t\in R$ funkcja $F_t(x)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej At:

$$F_t(x)=P(At<x)=P(A<x/t)=$$

$$=P\left(\frac{A-1}{2}<\frac{\frac{x}{t}-1}{2}\right)=\Phi\left(\frac{\frac{x}{t}-1}{2}\right)=\Phi\left(\frac{x-t}{2t}\right)$$

(Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego N(0,1)).

b) 0,6915

c) $m(t)=t$, $R(t_1,t_2)=5t_1t_2$, $K(t_1,t_2)=4t_1t_2$, $\sigma^2(t)=4t^2$

Zadanie 3

a) np. $x_1(t)=e^{-0,3t}$, $x_1(t)=e^{-0,5t}$, $x_1(t)=e^{-0,8t}$

b) $m(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$, $R(t_1,t_2)=\dfrac{1-e^{-(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}$,

$$K(t_1,t_2)=\frac{1-e^{-(t_1+t_2)}}{t_1+t_2}-\frac{(1-e^{-t_1})(1-e^{-t_2})}{t_1t_2},$$

$$\sigma^2(t)=\frac{1-e^{-2t}}{2t}-\frac{(1-e^{-t})^2}{t^2}$$

Zadanie 4

$m(t)=2t$, $R(t_1,t_2)=3t_1^2t_2^2+5t_1t_2$, $K(t_1,t_2)=3t_1^2t_2^2+t_1t_2$,

$\sigma^2(t)=3t^4+t^2$

Zadanie 5

$m(t)=-2t^2+3t$, $R(t_1,t_2)=8t_1^2t_2^2-4t_1^2t_2-4t_1t_2^2+14t_1t_2$,

$K(t_1,t_2)=4t_1^2t_2^2+2t_1^2t_2+2t_1t_2^2+5t_1t_2$, $\sigma^2(t)=4t^4+4t^3+5t^2$

Zadanie 6

$$m(t)=0\,,\ R(t_1,t_2)=\frac{1}{2}\cos(v(t_2-t_1))\,,\ \ K(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)\,,\ \sigma^2(t)=\frac{1}{2}$$

Zadanie 7

$$m(t)=0\,,\ R(t_1,t_2)=\frac{\sigma^2}{2}\cos(v(t_2-t_1))\,,\ \ K(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)\,,\ \sigma^2(t)=\frac{\sigma^2}{2}\,,$$

Zadanie 8

$$m(t)=-2t^2-3e^t\,,\ K(t_1,t_2)=t_1^2t_2^2+3e^{t_1+t_2}\,,$$

$$\sigma^2(t)=t^4+3e^{2t}\,,\ \ \rho(t_1,t_2)=\frac{t_1^2t_2^2+3e^{t_1+t_2}}{\sqrt{t_1^4+3e^{2t_1}}\sqrt{t_2^4+3e^{2t_2}}}\,,$$

Zadanie 9

$$m(t)=0\,,\ K(t_1,t_2)=t_1t_2+0{,}4\left(t_1+t_2\right)+1{,}5\,,$$

$$\sigma^2(t)=t^2+0{,}8t+1{,}5\,,\ \ \rho(t_1,t_2)=\frac{t_1t_2+0{,}4\left(t_1+t_2\right)+1{,}5}{\sqrt{t_1^2+0{,}8t_1+1{,}5}\sqrt{t_2^2+0{,}8t_2+1{,}5}}\,,$$

Zadanie 10

$$m(t)=0{,}5t+1\,,\ K(t_1,t_2)=\frac{1}{12}t_1t_2\,,\ \sigma^2(t)=\frac{1}{12}t^2\,,\ \ \rho(t_1,t_2)=1,$$

$$k=\frac{t_2}{t_1},\qquad c=\frac{t_1-t_2}{t_1}\,,$$

Zadanie 11

Realizacje to rodzina prostych.

$$m(t)=3t-3\,,\ K(t_1,t_2)=t_1t_2\,,\ \sigma^2(t)=t^2\,,\ \ \rho(t_1,t_2)=1,$$

Zadanie 14

$X(t)=t+A$, gdzie A jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa: P(A = 0) = 0,5; P(A = 1) = 1/3; P(A = 2) = 1/6.

$$m(t)=t+\frac{2}{3}\,,\ K(t_1,t_2)=\frac{5}{9},\ \sigma^2(t)=\frac{5}{9},\ \ \rho(t_1,t_2)=1,$$

$$k=1,\qquad c=t_2-t_1\,,$$

Zadanie 15

Realizacje procesu to stałe równe wartościom zmiennej losowej Y.

$$m(t)=m\,,\ K(t_1,t_2)=\sigma^2(t)=\sigma^2\,,\ \ \ \rho(t_1,t_2)=1,$$

Zadanie 16

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)=P(X(t_1)<x_1,X(t_2)<x_2)=P(Y<x_1,Y<x_2)=$$

$$=P(Y<x_{1,2})=F(x_{1,2})$$

gdzie $x_{1,2}=\min\{x_1,x_2\}$,

Zadanie 17

W każdej ustalonej chwili t proces ma rozkład normalny (funkcja liniowa rozkładu normalnego ma rozkład normalny) $N\left(mt+c,\sigma|t|\right)$.

Zatem $f(t,x)=\dfrac{1}{\sigma|t|\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-mt-c)^2}{2(\sigma|t|)^2}}$.

Zadanie 18

$m(t)=0$, $K(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)=e^{t_1+t_2}-\left(e^{t_1-t_2}+e^{t_2-t_1}\right)+e^{-(t_1+t_2)}$,

$\sigma^2(t)=e^{2t}-2+e^{-2t}$,

Zadanie 19

$m(t)=-1+t$, $R(t_1,t_2)=2+5t_1t_2-2(t_1+t_2)$,

$R(t_1,t_2)=1+4t_1t_2-(t_1+t_2)$, $\sigma^2(t)=4t^2+1-2t$

Zadanie 20

$m(t)=\dfrac{2}{3}t^2$, $R(t_1,t_2)=\dfrac{8}{9}t_1^2t_2^2+1$, $K(t_1,t_2)=\dfrac{4}{9}t_1^2t_2^2+1$, $\sigma^2(t)=\dfrac{4}{9}t^4+1$,

Zadanie 21

$m(t)=\dfrac{1}{2}\cos t$, $R(t_1,t_2)=\dfrac{1}{3}\cos t_1\cos t_2$, $K(t_1,t_2)=\dfrac{1}{12}\cos t_1\cos t_2$,

$\sigma^2(t)=\dfrac{1}{12}\cos^2 t$

L.K, W.M, 9.10.2009